

# 第 1 讲 一阶微分方程

## 方程 1 可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

### ※ 解法

对方程作变换，使得左边只有  $y$ ，右边只有  $x$ ，然后两边作积分

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

如果有初值条件  $y(x_0) = y_0$ ，要求特解，则可以直接采用定积分的形式

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

或者解出通解后代入初值条件求出  $C$

若存在  $y^*$  使得  $g(y^*) = 0$ ，则需要单独讨论  $y = y^*$  是否为原方程的解

### ※ 细节注意

- ① 积分得到对数时，注意要加绝对值
- ② 对数一般要指数化处理，去掉对数符号
- ③ 去除绝对值时，要在一侧加“±”
- ④ 任意常数的函数大概率依然是任意常数，可以整体替换成一个符号（见例题）

**例** (20-21 夏)  $\frac{dy}{dx} = (1 - y^2)x$

**解** 这是一个可分离变量的方程，分离变量得到

$$\frac{dy}{1 - y^2} = xdx$$

积分

$$\ln \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

移除对数符号与绝对值

$$\frac{1 - y}{1 + y} = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

令  $c = \pm e^C$  为任意常数，得到通解  $\frac{1 - y}{1 + y} = ce^{\frac{1}{2}x^2}$

## 方程 2 齐次方程

若分子、分母的每一项的变量次数（ $x$   $y$  次数之和）都相同，就是齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

### ※ 解法

代入  $u = y/x$ ，得到关于  $u$  和  $x$  的可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \xrightarrow{y=ux} u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

**例** (23-24 夏)  $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$ ,  $y(1) = 1$ .

**解** 稍作整理发现是一个齐次方程：

$$y' = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$$

于是令  $y = ux$ ：

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{4 + 3u^2}{2u}$$

分离变量：

$$\frac{2u}{4 + u^2} du = \frac{1}{x} dx$$

积分，并作代换，得

$$y^2 = Cx^3 - 4x^2$$

代入初值  $y(1) = 1$ ，得  $C = 5$ ，因此

$$y^2 = 5x^3 - 4x^2$$

### 方程 3 一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

#### ※ 解法

直接套公式即可

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$$

若已知初值  $y(x_0) = y_0$ ，则解可以写成

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(\xi)d\xi} \left[ \int_{x_0}^x f(\zeta)e^{\int_{x_0}^{\zeta} p(\xi)d\xi} d\zeta + y_0 \right]$$

见“伯努利方程”一节的例题

## 方程 4 伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$$

### ※ 解法

令  $z = y^{1-n}$ ，代入换元，得到  $z$  关于  $x$  的一阶线性微分方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$$

注意，当  $n > 0$  时，不要忘了  $y = 0$  也是一个解

**例** (20-21 夏)  $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{y}$ .

**解** 两边先同除  $x$  :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

注意到这是伯努利方程，其中  $n = \frac{1}{2}$ ，因此两边同除  $\sqrt{y}$ ，并令  $z = \sqrt{y}$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x \rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

代入一阶线性方程的通解公式

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int e^{\int \frac{2}{x} dx} \frac{x}{2} dx + C \right] = x^2 \ln x^2 + Cx^2$$

因此

$$y = z^2 = (x^2 \ln x^2 + Cx^2)^2$$

## 方程 5 全微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

### ※ 解法

首先看能不能化成方程 1~方程 4 的类型, 如果不能再按全微分方程解

① 检查是否有  $M'_x = N'_y$ , 若有, 则方程左边恰好是某二元函数  $u(x, y)$  的全微分, 跳转至③

② 方程左右两边同乘一个积分因子  $\mu(x, y)$ , 使  $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy$  变成全微分

·  $\mu(x, y)$  比较难求, 考试一般考查  $\mu(x)$  或  $\mu(y)$

若  $\frac{M'_y - N'_x}{N}$  只和  $x$  有关, 则积分因子为  $\mu(x)$ , 且  $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M'_y - N'_x}{N}$

若  $\frac{N'_x - M'_y}{M}$  只和  $y$  有关, 则积分因子为  $\mu(y)$ , 且  $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N'_x - M'_y}{M}$

· 由此解出  $\mu$ , 然后得到全微分

③ 由全微分积分得到通解  $u(x, y) = C$  (此处不再介绍曲线积分方法, 只介绍简单的积分法)

由  $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ , 先对  $M$  的  $x$  积分, 则有

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y) \quad (\text{任意 } y \text{ 函数})$$

再由  $N = \frac{\partial u}{\partial y}$ , 对得到的  $u(x, y)$  求导, 有

$$N = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \varphi'(y)$$

与已知的  $N(x, y)$  比对, 可以解出  $\varphi'(y)$ , 从而得到  $\varphi(y)$  (注意要包含  $C$ ), 最后得到原函数

**例 5** (23-24 夏)  $(y^2 + 3xy^3)dx + (1 - xy)dy = 0$

**解** 该全微分方程经检验不是全微分, 需要乘上积分因子, 计算得到

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \frac{-y - (2y + 9xy^2)}{y^2 + 3xy^3} = -\frac{3}{y}$$

因此积分因子为  $\mu(y)$ , 且

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{3}{y} \rightarrow \mu = \frac{1}{y^3}$$

两边同乘  $\mu = \frac{1}{y^3}$

$$\left(\frac{1}{y} + 3x\right)dx + \left(\frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

求通解:

$$u(x, y) = \int \left( \frac{1}{y} + 3x \right) dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} + \frac{3}{2}x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y^3}$$

解得  $\varphi(y) = -\frac{1}{2y^2} + C$ ，因此最终通解为

$$\frac{x}{y} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} = C$$

## BONUS 解微分方程的技巧

### ※ 换元法

齐次方程中我们令  $u = y/x$ ，伯努利方程中我们令  $z = y^{1-n}$ ，实际上，还有很多看似类型不明的方程可以用换元法换元成已知类型

#### ① 换元为可分离变量方程

**例 1** (20-21 夏)  $\frac{dy}{dx} = -\cos^2(x+y)$

**解** 令  $u = x + y$ ，则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$ ，代入：

$$\frac{du}{dx} - 1 = -\cos^2 u \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \cos^2 u = \sin^2 u$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = dx$$

积分：

$$-\cot u = x + C$$

将  $u = x + y$  代回，得到通解为

$$-\cot(x+y) = x + C$$

#### ② 换元为齐次方程

**例 2** (20-21 夏)  $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

**解** 解方程组  $\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ，于是令

$$X = x - 3 \quad Y = y + 2$$

代入原方程：

$$\frac{dY}{dX} = 2\left(\frac{Y}{X+Y}\right)^2 = 2\left(\frac{Y/X}{Y/X+1}\right)^2$$

令  $u = Y/X$ ：

$$u + X \frac{du}{dX} = 2\left(\frac{u}{u+1}\right)^2$$

$$\frac{u^2 + 2u + 1}{-u(u^2 + 1)} du = \frac{dX}{X}$$

积分

$$-\int \left( \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2 + 1} \right) du = \int \frac{dX}{X}$$

$$-2 \arctan u = \ln |Y| + C$$

代回  $x$  和  $y$  :

$$-2 \arctan \frac{y+2}{x-3} = \ln |y+2| + C$$

### ※ 倒反天罡

将  $x, y$  的地位互换, 本来看不出类型的方程可能就变成了  $x$  关于  $y$  的一阶线性方程或其它方程

**例 3** (23-24 春)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(x^2y^2 - 1)}$

**解** 这个方程不是常规类型中的一种, 观察发现右侧分母复杂, 分子很简单, 因此尝试取倒数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(x^2y^2 - 1)}{y} = x^3y - \frac{1}{y}x$$

整理得到伯努利方程

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = x^3y$$

因此令  $z = x^{-2}$ , 则

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = -2y$$

解得

$$z = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left[ -\int e^{\int \frac{2}{y} dy} 2y dy + C \right] = -2y^2 \ln |y| + Cy^2$$

解得

$$\frac{1}{x^2y^2} + 2 \ln |y| = C$$

此外,  $y=0$  也是一个解

## 第 2 讲 可降阶的二阶微分方程

### 方程 6 缺少 $y$ 的二阶微分方程

$$y'' = f(x, y')$$

#### ※ 解法

令  $y' = p$ ，则原方程变成  $p$  关于  $x$  的一阶微分方程

$$p' = f(x, p)$$

求解出  $p$  后再积分得到  $y$ ，此方法可适用于更高阶的微分方程（见例题）

**例** (20-21 夏)  $y''' - y'' = 12x^2 - 6$

**解** 令  $y'' = p$ ，则有  $\frac{dp}{dx} - p = 12x^2 - 6$

$$p = e^{-\int -dx} \left[ \int e^{\int -dx} (12x^2 - 6) dx + c_1 \right] = -6(2x^2 + 4x + 3) + c_1 e^x$$

两次积分得到

$$y = \int \int [-6(2x^2 + 4x + 3) + c_1 e^x] dx dx = -x^4 - 4x^3 - 9x^2 + c_1 e^x + c_2 x + c_3$$

### 方程 7 缺少 $x$ 的二阶微分方程

$$y'' = f(y, y')$$

#### ※ 解法

① 令  $y' = p$ ，则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ，代入方程，将其化为  $p$  关于  $y$  的一阶微分方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

② 求解该方程，得到  $p = \frac{dy}{dx} = \varphi(y)$ ，分离变量再解出  $y$

**例** (23-24 夏) 求解  $yy'' + (y')^2 = yy'$ ， $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$

**解** 令  $y' = p$ ，则有

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = yp \rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = 1 \rightarrow p = y + \frac{c_1}{y} = \frac{dy}{dx}$$

再积分得到

$$\frac{y}{y^2 + c_1} dy = dx \rightarrow y^2 + c_1 = c_2 e^{2x}$$

## 第 3 讲 高阶常系数线性微分方程求解

### 方程 8 高阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

#### ※ 解法

- ① 求解特征方程，得到  $n$  个特征根

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

- ② 得到每个特征值对应的特解  $y_1, \cdots, y_n$

若  $\lambda$  为  $k$  重实特征根，则其对应  $k$  个特解：

$$e^{\lambda x} \quad x e^{\lambda x} \quad x^2 e^{\lambda x} \quad \cdots \quad x^{k-1} e^{\lambda x}$$

若  $\lambda_1, \lambda_2$  各自为  $k$  重复特征根  $\alpha \pm i\beta$ ，则其对应以下  $2k$  个特解

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \cdots \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \cdots \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

- ③ 将特解线性组合，得到通解

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \quad (c_1, \cdots, c_n \text{ 为任意常数})$$

**例 1** (23-24 春)  $\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$

**解** 列出特征方程

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

找不到显著的实数解，观察五项的系数，发现呈对称关系，可能是某多项式的平方，猜想是

$$(\lambda^2 + a\lambda + 1)^2 = 0$$

展开后为  $\lambda^4 + 2a\lambda^3 + (a^2 + 2)\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0$ ，比较系数发现  $a = -1$ ，因此  $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2 = 0$

解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ， $\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ，也就是  $\alpha = \frac{1}{2}$ ， $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因此四个特解分别为

$$e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad x e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad x e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

通解

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left[ (c_1 + c_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_3 + c_4 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]$$

## 方程 9 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

### ※ 解法

#### ① 先求出对应的齐次方程的通解

二阶常系数齐次线性方程可以直接根据下表得出通解

情况	$y_1$	$y_2$	通解
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda x}$	$x e^{\lambda x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} \cos \beta x$	$e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

#### ② 根据 $f(x)$ 的类型设特解 $y^*$ ，代入原方程求待定系数

$f(x)$	$y^*$	说明
$P_m(x)e^{ax}$	$x^k R_m(x)e^{ax}$	$P_m(x)$ : $x$ 的 $m$ 次多项式 $k$ : $a$ 在特征方程中的重根数
$e^{\alpha x} [P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x]$	$x^k e^{\alpha x} [R_h(x)\cos \beta x + S_h(x)\sin \beta x]$	$h = \max\{m, l\}$ $k$ : $\alpha \pm i\beta$ 的特征方程重根数
$f_1(x) + f_2(x)$	分别求出 $f(x) = f_1(x)$ 和 $f(x) = f_2(x)$ 的特解 $y_1^*$ 和 $y_2^*$ ，则 $y^* = y_1^* + y_2^*$	

**例** (教材例题) 求方程  $y'' - y = e^x \sin 2x$  的通解

**解** · 求齐次通解: 特征方程为  $\lambda^2 - 1 = 0$ , 解得  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , 因此齐次通解为  $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

· 求非齐次特解: 注意到  $e^x \sin 2x$  中  $a = 1, \beta = 2, m = 0$ ,  $a \pm i\beta$  在特征方程中无根, 因此设特解

$$y^* = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

将  $y^*$  代入方程, 一通展开得到:

$$-4A \cos 2x + 4B \cos 2x - 4B \sin 2x - 4A \sin 2x = \sin 2x$$

比较系数, 解得  $A = B = -\frac{1}{8}$ , 因此特解  $y^* = -\frac{1}{8} e^x (\cos 2x + \sin 2x)$

· 综上所述, 非齐次通解为  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{8} e^x (\cos 2x + \sin 2x)$

## 第 4 讲 高阶变系数线性微分方程求解

### 方程 10 欧拉方程

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

#### ※ 解法

作如下变换

$$t = \ln |x| \quad \text{即} \quad x = \begin{cases} e^t, & x > 0 \\ -e^t, & x < 0 \end{cases}$$

代入可得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

于是原来的变系数线性方程成为了常系数线性方程

**例** (23-24 夏) 求解  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 7x \frac{dy}{dx} + 16y = 0$ ,  $y(-1) = 1$ ,  $y'(1) = -3$

**解** 这是欧拉方程, 可直接设  $t = \ln |x|$ :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 8 \frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{4t} = (c_1 + c_2 \ln |x|)x^4$$

由  $y(-1) = 1$ ,  $y'(1) = -3$ , 解得  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -8$ , 因此

$$y = (1 - 8 \ln |x|)x^4$$

## 方程 11 二阶变系数齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

※ 若已知其中一个特解  $y_1$

将  $y_1$  和  $p(x)$  代入刘维尔公式即可得到通解

$$y = y_1 \left[ c_1 + c_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx \right]$$

※ 若  $2p'(x) + p^2(x) - 4q(x) = a$  (常数)

令

$$y = ue^{-\int \frac{p(x)}{2} dx}$$

代入方程, 得到

$$u'' - \frac{a}{4}u = 0$$

求解该方程即可得到通解

## 方程 12 已知齐次通解的二阶变系数非齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad \text{其中 齐次通解 } y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

※ 解法

求出朗斯基行列式

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

然后按下式计算出非齐次特解

$$y(x) = y_1(x) \left( c_1 - \int \frac{y_2(x)}{w(x)} f(x) dx \right) + y_2(x) \left( c_2 + \int \frac{y_1(x)}{w(x)} f(x) dx \right)$$

该方程类型的考查通常会和方程 11 结合, 也就是要先用上面的方法求出齐次通解, 再利用它们求非齐次通解

**例 1** (23-24 夏) 求解  $(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - (x-2)y = x^2 - 2x - 2$

**解** 思路: 作为一个变系数方程, 还不是欧拉方程, 能用的方法只剩下一个了

· 先求齐次通解, 将方程化为标准形式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x-2} \frac{dy}{dx} - y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x-2}$$

· 检验

$$-\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^2} - 4(-1) = 4$$

满足常数变易法的要求，因此设

$$y = ue^{-\int \frac{1}{x-2} dx} = \frac{u}{x-2}$$

于是对应的齐次方程转化为

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

解该方程，并代回，得到两个线性无关的解

$$y_1 = \frac{e^x}{x-2}, y_2 = \frac{e^{-x}}{x-2}$$

· 现在求非齐次特解，朗斯基行列式

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} \frac{e^x}{x-2} & \frac{e^{-x}}{x-2} \\ \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2} & \frac{-e^{-x}(x-1)}{(x-2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

代入公式，该方程的通解为

$$y = \frac{e^x}{x-2} \left( c_1 + \frac{1}{2} e^{-x} (-x^2 + 2) \right) + \frac{e^{-x}}{x-2} \left( c_2 - \frac{1}{2} e^x (x^2 - 4x + 2) \right)$$

**例 2** (17-18 春) 已知  $y_1 = \frac{e^x}{x}$  是微分方程  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0$  的一个特解，求方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - y = x$$

的通解

**解** 直接将  $y_1 = \frac{e^x}{x}$  和  $p = \frac{2}{x}$  代入刘维尔公式

$$y = \frac{e^x}{x} \left[ c_1 + c_2 \int e^{-2x} dx \right] = c_1 \frac{e^x}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x}$$

因此

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} e^x/x & e^{-x}/x \\ (e^x/x)' & (e^{-x}/x)' \end{vmatrix} = -\frac{2}{x^2}$$

代入公式，得到非齐次方程的通解

$$y(x) = \frac{e^x}{x} \left( c_1 + \frac{1}{2} \int x^2 e^{-x} dx \right) + \frac{e^{-x}}{x} \left( c_2 - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx \right) = c_1 \frac{e^x}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x} - \frac{x^2 + 2}{x}$$

## 方程 13 幂级数法解二阶变系数非齐次方程 (仅 1.5 学分)

施工中





解 ① 求齐次  $\mathbf{X}$ :  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$ , 对应  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ ,  $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$ , 基本解矩阵  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix}$

② 求解  $\mathbf{X}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f}(t)$ :

$$\begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix} \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}$$

解得  $\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$ , 积分得  $\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix} + \mathbf{c}$

③ 组合出通解

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix} + \mathbf{c} \right)$$

代入  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ , 解得  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 因此特解为  $\begin{cases} x = 2e^{2t} - e^t \\ y = e^t \end{cases}$